第２章
連立方程式１
２Dバージョン

変数　連立方程式の場合は:

A君がリンゴを何個か、ミカンを何個か買いました.
何個かは未知です⇒ 変数 x、y

合わせて5個でした. ⇒ x+y=5
リンゴは20円、ミカンは10円で、
支払った金額は全部で80円でした.
⇒20*x+10*y=80

リンゴとミカンの個数を答えなさい.
（中学校の方程式の話）

- 連立方程式における変数
  : ある値を持つが、未知
  （解いてみないとわからない）

- 等式を操作し等式を導出
  y = 5-x　　移項
  20x +10(5-x) = 10x + 50 = 80　式の代入
  よって、x=3, y=2

- 全て 左辺 ＝ 右辺
  最初から最後まで全て等式の世界

連立方程式を計算機を使って解く

✓ 数値的に解く:
行列とベクトル．逆行列、疑似逆行列
行列を操作する Python ライブラリの利用：

意味がわからなくても解けてしまう！

⇒ 本授業：作図によって解く方法から
解が存在しない場合の近似解の話まで
ライブラリの利用は疑似逆行列のみ（逆行列の一般化）

✓ 代数的に解く（中学数学のやり方を深化させたもの）:
等式を操作し解を求めるプロセスを自動化
Python ライブラリとしては Symbolic Python など

参考

```
import sympy # ライブラリ symbolic python の利用を宣言
x=sympy.Symbol('x'); y=sympy.Symbol('y')
ex1 = x+y-5; ex2 = 20*x+10*y -80; sympy.solve((ex1,ex2))
          # ex3 も同時に連立させる場合は sympy.solve((ex1,ex2,ex3))  .
          # 解が不定の場合は x=y-5 のように、解が満たすべき等式を出力
```

ベクトル（方向と長さを持つ量）

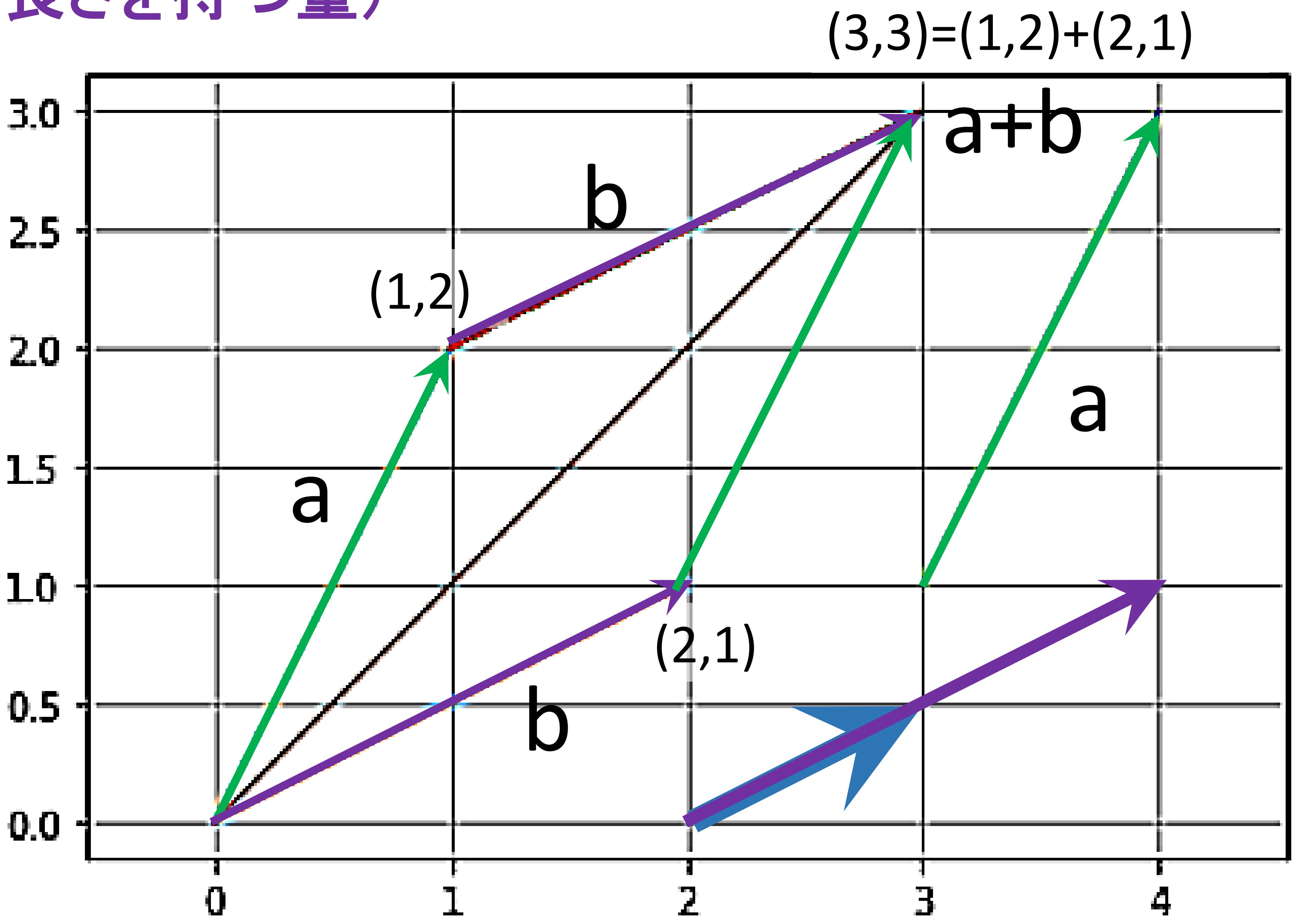
始点と終点が異なっても，方向と長さが同じなら 同じベクトル

表記は (a,b) もしくは $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ で 原点から座標 (a,b) への矢印で代表（と考える）

ベクトルの和は3角形もしくは平行四辺形で

スカラー倍：方向性はキープし大きさだけλ倍

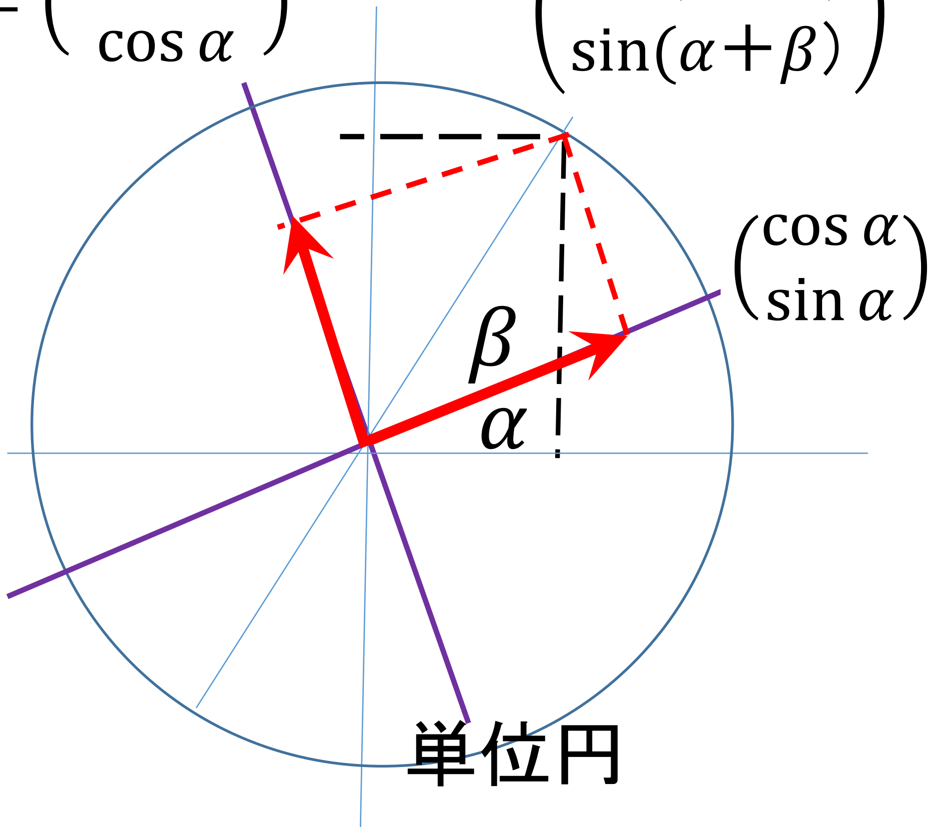
$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



ベクトルの和とスカラー倍を用いた 三角関数の加法定理

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$



α 度回転させた座標軸で考える

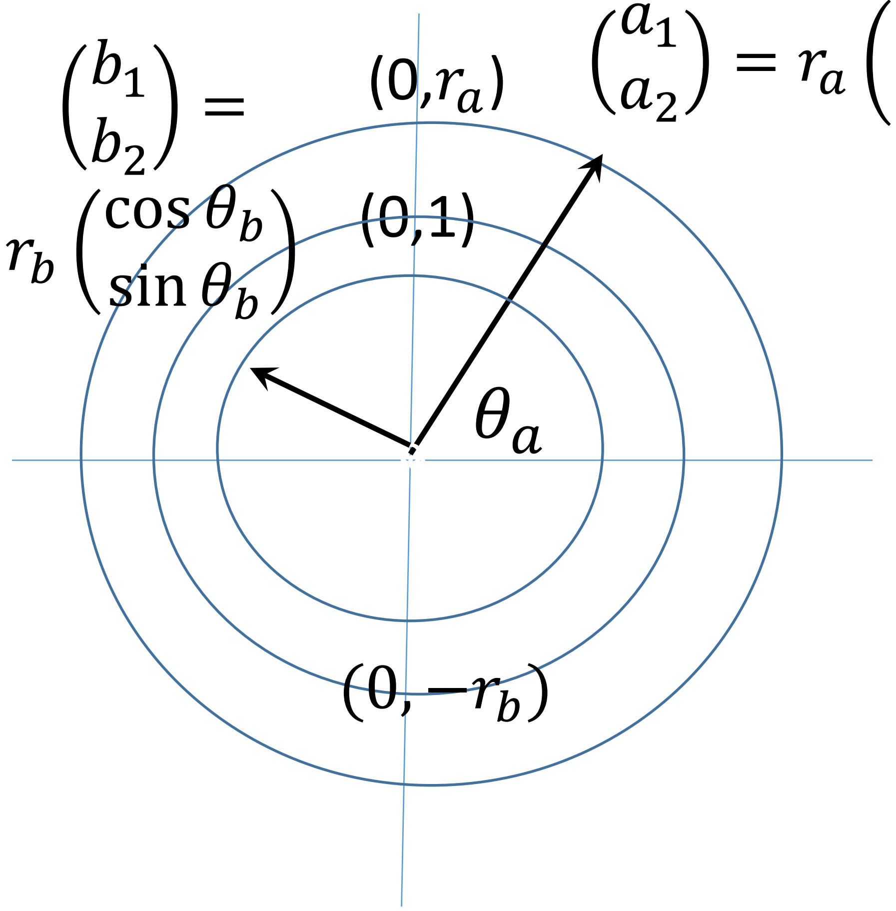
i.e. 新たな単位ベクトルをスカラー倍し、
それらを足して 目的のベクトルが！

$$\cos\beta\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \sin\beta\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

おそらく最もエレガントな証明で、
ベクトルの和とスカラー倍を良く理解できる事例

ついでにベクトルの内積

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = r_a \begin{pmatrix} \cos\ \theta_a \\ \sin\ \theta_a \end{pmatrix}$$



内積 $a_1 b_1 + a_2 b_2$

$= r_a r_b \cos\ \theta_a \cos\ \theta_b + r_a r_b \sin\ \theta_a \sin\ \theta_b$

$= \ r_a r_b \cos(\ \theta_a - \ \theta_b)$

大きさの積 ＊ 挟み角度の余弦

特に, 直交するベクトルの内積は零

変数

連立方程式を線形代数の作図で解く

後のデータ分析と関係するのでついでにここでも説明

る描画についても

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 20x + 10y &= 80 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 80 \end{pmatrix}$$

ベクトルのスカラー倍と和で表現すると

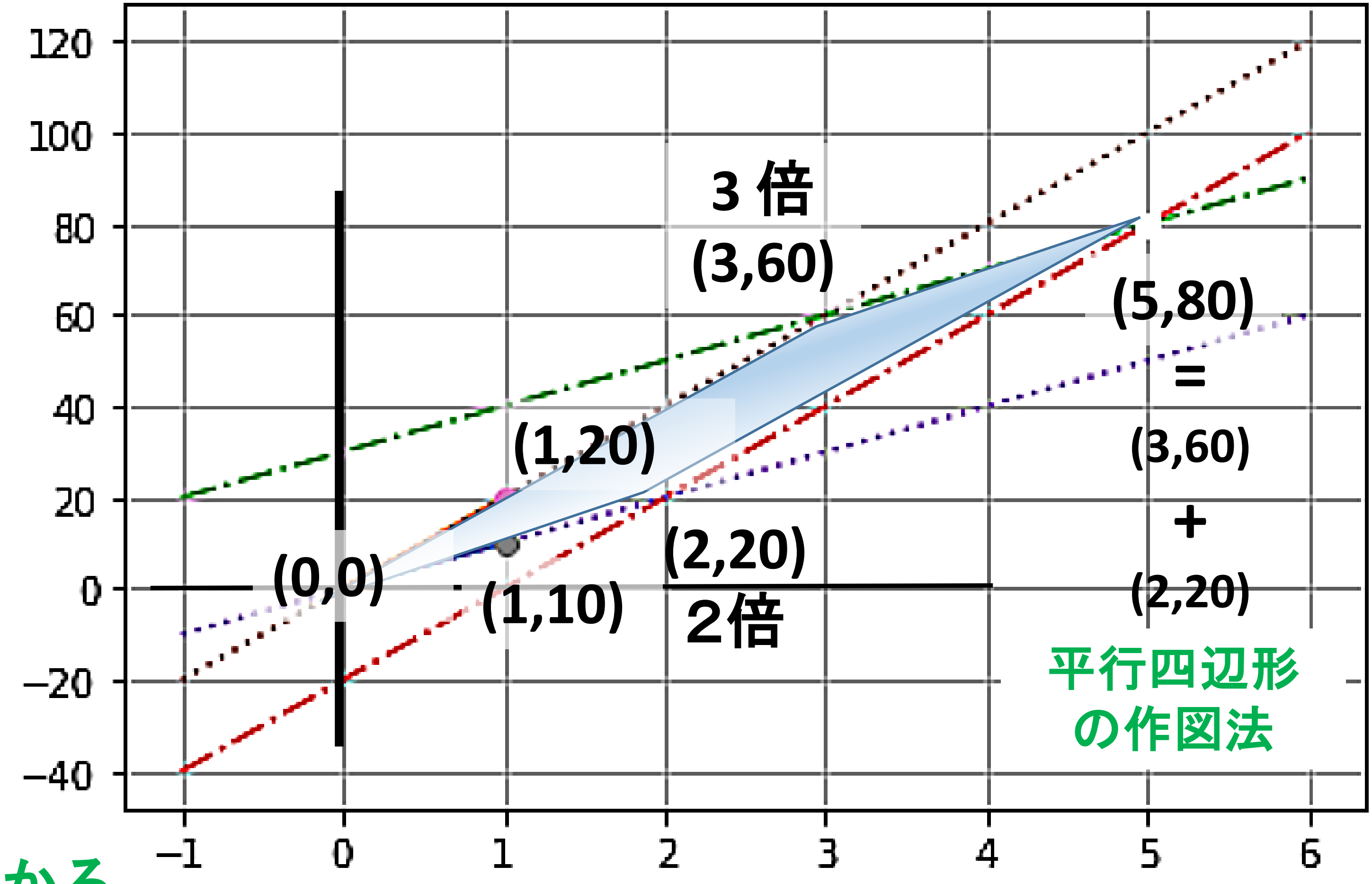
$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 20x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 10y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 20x + 10y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 80 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

左辺：$\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}$ を（正負で）延び縮みさせたもの

右辺：$\begin{pmatrix} 5 \\ 80 \end{pmatrix}$ を通り、$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ 方向で

（正負で）延び縮みさせたもの



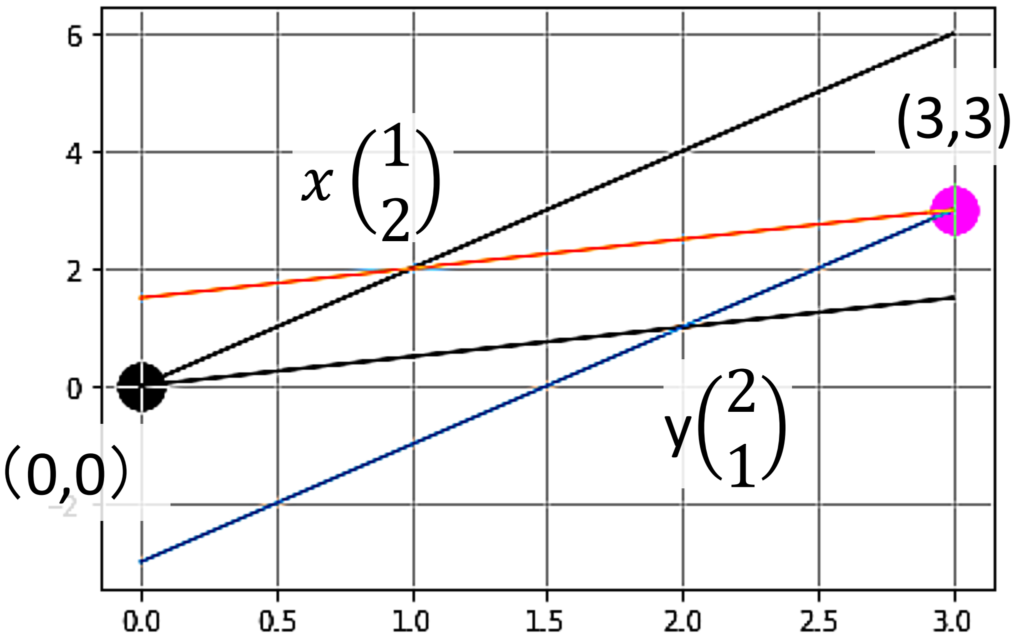
結局、直線の交点を求めてｘ、ｙはわかる

連立方程式が解を持つ条件は？

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$\dfrac{Y-3}{X-3}=$ 傾き 2, 0.5 （(3,3)を通る2直線

2つのベクトルの方向性が異なれば、
必ず 解 x,y はただ一つだけ決まる
根拠: 平行でない(平面上の)直線は交わる



方向性が同じだとどうなる？

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=(x-y)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\1.0\end{pmatrix}$$

右辺 (●)は傾き2 の直線上なので
x-y=0.5 を満たす任意のx,yが解（不定）
右辺が ● の場合は、解は存在しない.